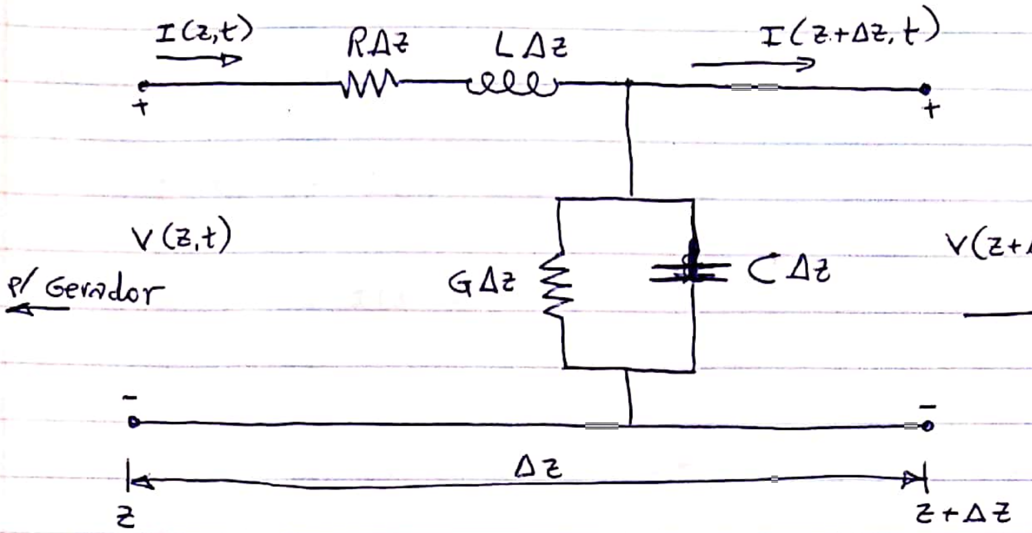
Linhas de Transmissão : Parte - 1

Derivação das equações de L.T. :



G = condutância paralela (S/m)

C = capacit. paral. (F/m)

$V = -\int_{\infty}^{r} E \cdot dl$

↳ porque o potencial em $\infty = 0$

Propriedade de ondas TEM :

$$V = -\int \bar{E} \cdot dl \quad (1) \qquad I = \oint \bar{H} \cdot dl \quad (2)$$

Assim, ao invés de usarmos as eq. de Maxwell, utilizaremos elementos de circuitos elétricos.

Propagação ao longo de +z

Aplicando a lei das tensões de Kirchhoff no laço externo:

$$V(z,t) = R\Delta z\, I(z,t) + L\Delta z \frac{dI(z,t)}{dt} + V(z+\Delta z,t)$$

rearranjando :

$$-\frac{V(z+\Delta z,t) - V(z,t)}{\Delta z} = R\, I(z,t) + L \frac{dI(z,t)}{dt} \quad (3)$$

Tomando o limite $\Delta z \to 0$ em (3):

$$\boxed{-\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = R\,I(z,t) + L\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}} \qquad (4)$$

Aplicando agora a lei das correntes no nó principal:

$$I(z,t) = I(z+\Delta z,t) + \Delta I$$

$$= I(z+\Delta z,t) + \frac{V(z+\Delta z,t)}{1/G\Delta z} + C\Delta z\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

$$= I(z+\Delta z,t) + G\Delta z\,V(z+\Delta z,t) + C\Delta z\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

Rearranjando:

$$-\frac{I(z+\Delta z,t) - I(z,t)}{\Delta z} = G\,V(z+\Delta z,t) + C\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t} \qquad (5)$$

Quando $\Delta z \to 0$, eq. (5) torna-se:

$$\boxed{-\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = G\,V(z,t) + C\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}} \qquad (6)$$

Supondo dependência harmônica no tempo de modo que:

$$V(z,t) = \mathrm{Re}\left[V_s(z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (7a)$$

$$I(z,t) = \mathrm{Re}\left[I_s(z)\,e^{j\omega t}\right] \qquad (7b)$$

onde $V_s(z)$ e $I_s(z)$ são as formas fasoriais de $V(z,t)$ e $I(z,t)$, respectivamente, então as equações (4) e (6) tornam-se:

$$-\frac{dV_s}{dz} = (R + j\omega L) I_s \quad (8)$$

$$-\frac{dI_s}{dz} = (G + j\omega C) V_s \quad (9)$$

Observe q/ as equações (8) e (9) são acopladas.
Para desacoplá-las:

a) tome a derivada segunda de (8):

$$-\frac{d^2V_s}{dz^2} = (R + j\omega L)\frac{dI_s}{dz}$$

substitua (9) na eq. acima:

$$-\frac{d^2V_s}{dz^2} = -(R + j\omega L)(G + j\omega C) V_s$$

ou

$$\frac{d^2V_s}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) V_s$$

simplificando:

$$\boxed{\frac{d^2V_s}{dz^2} - \gamma^2 V_s = 0} \quad (10)$$

onde:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (11)$$

De maneira similar, tomando a derivada segunda de (9) e utilizando (8):

$$\boxed{\frac{d^2I_s}{dz^2} - \gamma^2 I_s = 0} \quad (12)$$

As eq. (10) e (12) são as equações de onda p/ tensão e corrente.

γ = constante de propagação
α = " " atenuação
β = " " fase

O comprimento de onda (λ) e a velocidade da onda (u) são, respectivamente:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (13)$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda \quad (14)$$

As soluções de (10) e (12) (por se tratarem de eq. dif. de seg. ordem) são compostas por uma componente q/ se propaga na direção $+z$ e outra na $-z$. Assim,

$$V_s(z) = \underbrace{V_o^+ e^{-\gamma z}}_{+z} + \underbrace{V_o^- e^{\gamma z}}_{-z} \quad (15)$$

$$I_s(z) = I_o^+ e^{-\gamma z} + I_o^- e^{\gamma z} \quad (16)$$

onde V_o^+, V_o^-, I_o^+ e I_o^- são amplitudes de ondas.

A expressão instantânea p/ tensão torna-se:

$$V(z,t) = Re\left[V_s(z)e^{j\omega t}\right]$$

$$= V_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + V_o^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \quad (17)$$

Podemos definir agora um parâmetro importantíssimo, q/ é a impedância característica Z_o.
Z_o é a razão da tensão pela corrente na direção $+z$ em qualquer ponto da linha.
Z_o é análogo à impedância intrínseca do meio (η)

Substituindo (15) e (16) em (8) e (9), e igualando coeficientes de termos $e^{\gamma z}$ e $e^{-\gamma z}$:

$$+\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} - \gamma V_0^- e^{\gamma z} = (R+j\omega L)\left[I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}\right]$$

isolando termos em $e^{-\gamma z}$:

$$\gamma V_0^+ \cancel{e^{-\gamma z}} = (R+j\omega L) I_0^+ \cancel{e^{-\gamma z}}$$

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{R+j\omega L}{\gamma}$$

se isolarmos os termos em $e^{\gamma z}$:

$$-\gamma V_0^- e^{\gamma z} = (R+j\omega L) I_0^- e^{\gamma z}$$

$$\frac{V_0^-}{I_0^-} = -\frac{(R+j\omega L)}{\gamma}$$

Logo:

esta parte vem de (16)

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{R+j\omega L}{\gamma} = \frac{\gamma}{G+j\omega C} \qquad (18)$$

ou:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = R_0 + jX_0 \qquad (19)$$

R_0 é em Ohms (e não em Ω/m) componente resist.
X_0 é a componente reativa
O recíproco de Z_0 é a admitância Y_0

$$\boxed{Y_0 = \frac{1}{Z_0}}$$

Comp. reativa não dissipa pot. Elas absorvem e devolvem igualmente.
Tensão e corrente são defasadas de 90°